**Дифференциальные уравнения.**

**Занятие 1.**

**Определение 1.** Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение вида

(1)

где независимая переменная, искомая функция, её производные, а заданная функция переменных. Порядок старшей производной, входящей в уравнение, называется порядком уравнения. Уравнение (1) является уравнением порядка *n.*

**1. Уравнения первого порядка.**

**Определение 2.** Уравнением первого порядка, разрешённым относительно производной, называется уравнение вида

(2)

Рассмотрим

**Пример 1.** Решить уравнение .

Очевидно, что функции при произвольных константах являются решениями этого уравнения. Из примера 1 видно, что решениями ДУ являются семейства функций (забегая вперёд, скажем, что количество констант, входящих в так называемое общее решение уравнения, равно порядку уравнения). Графики этих функций называются интегральными кривыми.

**Определение 3.** Задачей Коши для уравнения (2) называется задача вида

(3)

то есть, задача по нахождению такого решения уравнения (2), которое в заданной точке принимает заданное значение , или, иными словами, задача по нахождению той интегральной кривой, которая проходит через точку .

Равенство называется начальным условием.

Возникает вопрос, когда через точку проходит единственная интегральная кривая? Ответ на этот вопрос даёт следующая

**Теорема 1. (Коши – Пеано).** Пусть в некоторой окрестноститочки функции и непрерывны. Тогда, быть может, в более узкой окрестности точки через эту точку проходит единственная интегральная кривая.

**Определение 4.** Задача Коши (3) называется корректно поставленной, если для неё выполнены условия теоремы Коши – Пеано.

**Определение** **5.** Однопараметрическое семейство функций называется общим решением уравнения (2), если:

1) при каждом допустимом значении параметра *c* функция является решением уравнения (2);

2) семейство содержит решения всех корректно поставленных задач Коши (3).

**Замечание 1.** У уравнения могут быть так называемые особые решения, которые не содержатся в общем решении.

**Определение 6.** Уравнение , задающее неявным образом общее решение уравнения (2), называется общим интегралом этого уравнения.

**2. Уравнения с разделяющимися переменными.**

**Определение 7.** Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение, представимое в виде

. (4)

Умножим обе части уравнения на и проинтегрируем по *x*:

Поскольку то окончательно получим:

(5)

Если в последнем равенстве все слагаемые перенести в левую часть. То получим общий интеграл уравнения (4). Если уравнение (5) разрешить относительно *y* (разумеется, если это возможно), то получим общее решение уравнения (4).

Следует заметить, что к равенству (5) на практике удобнее прийти следующим образом: используя для производной обозначение , записать уравнение (4) в виде , разделив переменные, получить равенство , а затем приписать значки интегралов к обеим частям равенства.

**Замечание 2.** После разделения переменныхдифференциалы и должны оказаться в числителях.

Перейдём к решению конкретных уравнений.

**Пример 2.** Решить задачу Коши ,

Запишем уравнение в виде и разделим переменные: . Откуда получим: , . Заметим, что при решении ДУ часто произвольную константу удобно бывает представлять в виде Из последнего равенства по свойству логарифмов получим: . Если в последнем равенстве все слагаемые перенести в левую часть, придав ему вид равенства из определения (6), то получим общий интеграл уравнения. Опустив логарифмы, а в силу произвольности константы *c –* и модули, получим общее решение уравнения: Интегральные кривые представляют собой пучок прямых, проходящих через начало координат. То есть, через точку (0,0) проходит бесчисленное множество решений, а через все другие точки оси *Y* – ни одного. Это связано с тем, что функция не удовлетворяет условиям теоремы 1 при *x=0.*

Найдём теперь решение поставленной задачи Коши. Подставив в общее решение *x=1, y=2,* получим, что *c=2,* следовательно, решениемзадачи Коши является функция *y=2x.*

**Замечание 3.** Особо отметим, что часто студенты, по существу верно решив задачу, за решение задачи Коши выдают найденную константу, не подставив её в общее решение, тем самым проявив незнание того, что называется решением задачи Коши.

Заметим, что ДУ первого порядка может быть записано и в следующем виде: Чтобы придать ему вид уравнения (2), нужно перенести первое слагаемое в правую часть уравнения и поделить обе части уравнения на *Q(x,y)dx.* Тогда получим: . Чаще всего этого делать не нужно, если речь идет об уравнениях с разделяющимися коэффициентами, поскольку дифференциалы уже разделены.

**Пример 3.** Найти общее решение уравнения

Перенесём первое слагаемое в правую часть уравнения, умножим обе части уравнения на , разделим на и проинтегрируем обе части полученного равенства. Тогда получим:

Посчитаем интегралы.

*==y+.*

.Тогда общее решение неявным образом задаётся уравнением

,

или более компактно

Очевидно, что это уравнение невозможно разрешить ни относительно , ни относительно

**Задачи для самостоятельного решения.**

Решить уравнения и задачи Коши

*.*

**3. Уравнения, сводящиеся к уравнениям с разделяющимися.**

В этом пункте мы рассмотрим два класса уравнений, сводящихся к уравнениям с разделяющимися переменными.

1) Пусть уравнение представимо в виде

(6)

где - какие-то константы.

Введём новую неизвестную функцию . Тогда

Умножив обе части уравнения (6) на , а затем прибавив к обеим частям уравнения , получим: или

Последнее уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Действительно, записав его в виде

,

Легко получим

*,*

откуда следует:

*.*

Нужно помнить, что после вычисления интеграла в левой части последнего равенства нужно положить

Это и будет общий интеграл исходного уравнения*.*

**Пример 4.** Решить уравнение .

Перепишем уравнение в виде

.

Положим . Тогда , следовательно, уравнение примет вид

, откуда .

Разделив переменные, получим:

, откуда. Вычислим интеграл из левой части последнего равенства.

==.

Положив , окончательно получим:

**Задачи для самостоятельного решения.**

Решить уравнения и задачи Коши.

. .

.

2). Рассмотрим так называемые *однородные уравнения*

,(7)

то есть уравнения, правая часть которых представима в виде функции от отношения

Для того, чтобы свести такое уравнение к уравнению с разделяющимися переменными, нужно ввести новую неизвестную функцию Тогда , и уравнение примет вид

откуда получим: . Разделив переменные и проинтегрировав, получим: *,* откуда следует:

После вычисления интеграла нужно положить

**Пример 5.** Решить уравнение .

Перепишем уравнение в виде , откуда легко получить:

*.* Положим , тогда , и уравнение примет вид: , откуда . Разделим переменные: . Проинтегрировав обе части последнего равенства, получим: . Положив , получим , откуда .

**Пример 6.** Решить уравнение .

Перепишем уравнение в виде: , откуда . Положим

, тогда . Подставив в уравнение, получим:

*,* или . Разделим переменные и проинтегрируем:. Тогда получим: , откуда , , откуда получим общее решение

**Задачи для самостоятельного решения.**

Решить уравнения

3)

.